数理解析研究所講究録
909巻 1995年 201-207

配置空間の一意化 − 超幾何積分

YOSHIDA Masaaki
九大数理　吉田　正章

皆さんのお話はリー群 G から出発されました。表現の分類, Whittaker, Wave, spherical 関数等の研究；それらはりっぱな数学です。だれからも後指をさされません。

私の今日の話は線型函数の(複素)巾の積の積分から始まります。

$$\int \prod_j l_j^{\alpha_j}$$

こんなものを考えて何かいいことがあるのでしょうか。なぜこんなものを調べなくてはいけないのか皆様を納得させる理由を私は持っていません。私自身こんなことをやっていていいのだろうかといつも考えています，限界も知っているつもりです．一番簡単な例

$$\int t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt \quad (\mathrm{Beta}), \quad \int t^{*}(1-t)^{*}(1-xt)^{*}\,dt \quad (\text{超幾何})$$

が特殊函数と名の付く本及び工学部向け数学概論の教科書の最初の10頁以内に出ているとか言うことは，あまり説得力が

あるとは思っていません。

御存知のように数学にはI,…,IVの4つのtypeがあります。

	大切	大切でない
面白い	I	III
面白くない	II	IV

保型形式のFourier展開の係数を調べるというのは，大切で面白いに決ってますからI型です。しかし，もしCasimir op.やshift op.'sの合成を書いてみたら，1つの係数で10頁かかったとなると，だんだんII→IVとなってゆきます。もしroot系の分類がBourbakiの本の最後の数頁でなく，小さなfontで印刷しても東京都の電話帳みたいになっていたら，root系に関係する数学もI型とは言えないでしょう。

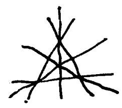
私はIII型の数学を目ざしています。大切でないかもしれないのですから、面白くなかったらIV型です。今日は上に言った積分を使って，配置空間を研究をします。うまくゆく保障は何もありません。実は殆んどの場合だめなのです。

<u>定義</u> The configuration space of n points (hyperplanes) in general position on $\mathbb{P}^{k-1}$ とは

$$X(k,n) := GL(k)\backslash \{x \in \underset{\substack{\uparrow \\ k\times n\text{ 行列}}}{M(k,n)} \mid {}^{\forall}k\text{-minor} \neq 0\} / \underset{\substack{\uparrow \\ \text{対角型の}GL(n)}}{H(n)}.$$

すぐ分るようにこの空間は $\mathbb{C}^{(k-1)(n-k-1)}$ のZariski開集合です。

例. $X(2,4) \simeq \mathbb{P}^1 - \{3点\}$,

$X(2,5) \simeq \mathbb{P}^2 -$  .

記号, 約束: $\mathbb{P}^{k-1} \ni t_1 : \cdots : t_{k-1} : t_k = 1$, $x = (x_{ij}) \in M(k,n)$ に対して,

$$l_j = \sum_1^k x_{ij} t_i, \qquad l_n = 1,$$

i.e. n 番目の超平面は無限遠とする.

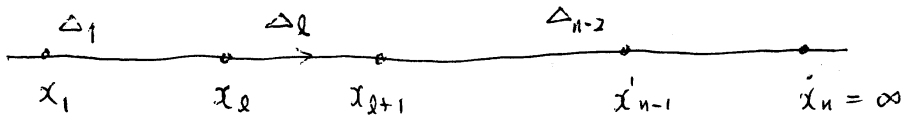
我々の積分は,

$$u_\Delta(x) = \int_\Delta \prod_{j=1}^{n-1} l_j^{\alpha_j - 1} \, dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_{k-1}$$

である。積分域Δは後で説明する. この積分は左 $GL(k)$, 右 $H(n)$ の作用で不変でない。不変な型に書くこともできる(松本 invariant form)が今日はΔをたくさん取ってきて, u_Δ達の比を考えるので, このままにしておく。

$k=2$ (積分は1次元)

$$u_l(x) = \int_{\Delta_l} \prod_{j=1}^{n-1} (x_j - t)^{\alpha_j - 1} \, dt \qquad l = 1, \dots, n-2.$$

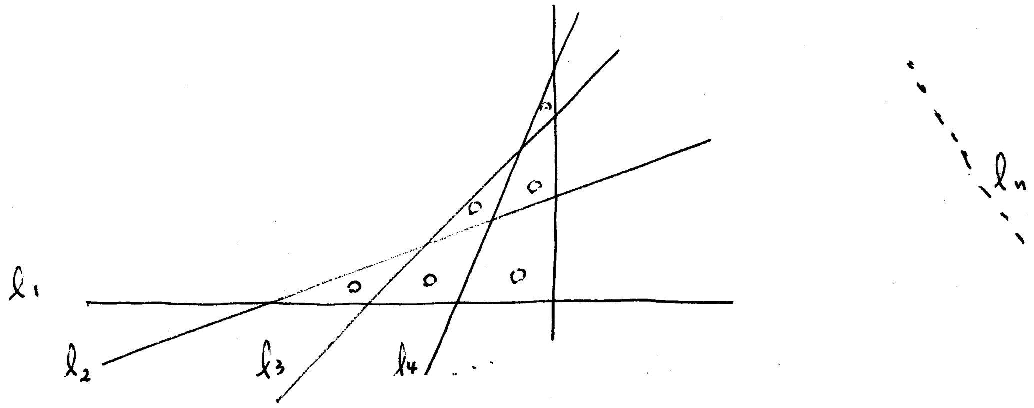


u_l 達をならべて(多価写像)

$$\varphi : X(2,n) \ni x \longmapsto u_1(x) : \cdots : u_{n-2}(x) \in \mathbb{P}^{n-3}$$

を考える.

$k=3$ (積分は2次元). 積分域は以下の通り:



一般の k では $l_1, \dots, l_{n-1}$ で囲れる有界域

$$\Delta_1, \dots, \Delta_r. \qquad r = \binom{n-2}{k-1}$$

で積分し, $u_j(x) := u_{\Delta_j}(x)$, 多価写像

$$\varphi : X(k,n) \ni x \longmapsto u_1(x) : \cdots : u_r(x) \in \mathbb{P}^{r-1}$$

を考える。

配置空間の一意化: $\alpha_j \in \mathbb{Q} - \mathbb{Z}$ をうまくとって, 像 $\mathrm{Im}\,\varphi$ がある対称領域 D の open dense subset, $D \subset \mathbb{P}^{r-1}$ は equivariant embedding, そして φ^{-1} が一価, i.e.

$$X(k,n) \xrightarrow[\sim]{\varphi} (D - \mathrm{fixed}(\Gamma))/\Gamma$$

($\Gamma < \mathrm{Aut}(D)$, discrete) としたい。

何の理由もありません。そうなったらいいなあと思ったまでです。そうなる例は,

$k=2$; $n=4$ ∞ケ $D = B_1$ ($\simeq H$ ← 上半平面)

$n=5$ 27ケ $D = B_2$ ← Ball

$\vdots$ だんだん減って $\vdots$ 領域はI型

$n=8$ 　1個 　$D = B_5 \leftarrow$ 5次元 Ball

$n \geq 9$ 　なし. --- 数学はIV型

ところで, $k=2$ のときは, $u_1, \dots, u_{n-2}$ は Appell-Lauricella の超幾何微分方程式 F_D^{n-3} の線型独立解を与える. 解が方程式の rank 分 explicit に分っているのに方程式をみたすことなんかどうでもよいではないかと考えるのは間違いです。まっそれはともかく,この方程式系を

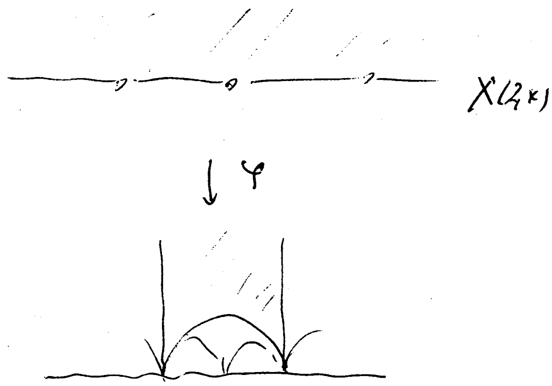
$$E(2, n ; \alpha) \qquad \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$$

と書きます.

典型例 1. $E(2,4;1/2)$, $1/2 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

このとき積分は elliptic curve の periods とも思える. 2つの積分によって,

$$X(2,4) \underset{\sim}{\xrightarrow{\varphi}} H/\Gamma(2)$$



φ^{-1} を theta 函数で表す話は次の松本氏の話参照.

典型例 2. $E(2,8;1/4)$

$$X(2,8) \underset{\sim}{\xrightarrow{\varphi}} B_5/\Gamma \qquad \Gamma \leftarrow \mathbb{Z}[i]$$

φ^{-1}: M氏は「自分が本気になれば表示を得られる」と言っている。

$k \geqq 3$ のとき一番簡単なのが $X(3,6)$。積分域は6つ

$$\varphi: X(3,6) \ni x \longmapsto u_1(x) : \cdots : u_6(x) \in \mathbb{P}^{6-1}$$

($X(3,6)$ は) 4次元

$\mathrm{Im}\,\varphi$ は $\mathbb{P}^5$ の超曲面．これが対称領域になるためには二次超曲面に入ってないといけないが，その為には

$$\alpha_1 = \cdots = \alpha_6 = 1/2$$

でないといけない。(これは $u_\ell(x)$ のみたす微分方程式系のある不変量を計算することにより分る)。これ一通りしかないのは実に残念だけどしょうがない。この場合積分は K3 曲面の periods を与えている．(generic には transcendental cycles は 6 个)。像は 2次超曲面 $Q \subset \mathbb{P}^5$ の non compact dual $D \subset Q$ に open dense に入る．D は IV 型領域．

大事なことを忘れていました。この頁からは松本圭司氏と佐々木武氏との共同研究 [MSY] の紹介です．即 $E(3,6;1/2)$ の解を6つならべて比をとる写像 φ により

$$X(3,6) \xrightarrow{\sim} D/\Gamma, \quad D \underset{\text{open}}{\subset} Q_{\mathbb{C}} \subset \mathbb{P}^5 .$$

(Γ は) $\mathbb{Z}$

一方 D は4次元 IV 型故 I 型領域

$$H_2 = \{ z \in M(2,2) \mid \frac{z - {}^t\bar{z}}{2i} > 0 \}$$

と同型故

$$X(3,6) \underset{\leftarrow\sim}{\xrightarrow{\varphi}} H_2/\Gamma$$

(Γ は) $\mathbb{Z}[i]$

φ^{-1} を theta で表す話は次の松本氏の講演．

とも思える. $X(3,6)$ の元 $l=(l_1,\cdots,l_6)$ である conic に接するものの全体は, non-singular conic は $PGL(3)$ を modulo にして一意故, conic $(\simeq \mathbb{P}^1)$ 上の 6点の configuration space 即 $X(2,6)$ とみなせる. 上の同型で, それは Siegel

3次元

Ⅲ型領域

上半空間 $\mathfrak{S}_2=\{z\in H_2 \mid z={}^t z\}$ に対応している:

$$
\begin{array}{ccccc}
X(3,6) & \xrightarrow[\sim]{} & H_2/\Gamma & & \cdots\ U(2,2) \\
\cup & 2 & \cup & & \\
X(2,6) & \xrightarrow[\sim]{} & \mathfrak{S}_2/\Gamma(2) & & \cdots\ Sp_2(\mathbb{R})
\end{array}
$$

$k\geqq 3$ で, $(k,n)=(3,6)$ 以外に超幾何積分を使って, 配置空間 $X(k,n)$ の一意化は, 出来ない ことが, 山口佳三 氏により証明されてしまった。そこで使われた微分方程式の理論は興味深いが, 何とも残念である.

文献は松本圭司氏のそれを参照して下さい. 以上